1

(30 点)

0 でない実数 a, b, c は次の条件(i)と(ii)を満たしながら動くものとする.

(i) $1 + c^2 \leqq 2a$.

(ii) 2 つの放物線 $C_1 : y = ax^2$ と $C_2 : y = b(x-1)^2 + c$ は接している.

ただし, 2 つの曲線が接するとは, ある共有点において共通の接線をもつことであり, その共有点を接点という.

(1) C_1 と C_2 の接点の座標を a と c を用いて表せ.

(2) C_1 と C_2 の接点が動く範囲を求め, その範囲を図示せよ.

2

(30 点)

$n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ.

3

(35 点)

α は $0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし, 四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える.

(i) 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する.

(ii) $\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{DAB} = \alpha$.

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで, 4 辺の長さの積

$$k = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cdot \mathrm{CD} \cdot \mathrm{DA}$$

が最大となるものについて, k の値を求めよ.

$\boxed{4}$ (35 点)

コインを n 回投げて複素数 z_1, z_2, $\cdots$, z_n を次のように定める.

(i) 1回目に表が出れば $z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とし，裏が出れば $z_1 = 1$ とする.

(ii) $k = 2, 3, \cdots, n$ のとき，k 回目に表が出れば $z_k = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} z_{k-1}$ とし，裏が出れば $z_k = \overline{z_{k-1}}$ とする．ただし，$\overline{z_{k-1}}$ は z_{k-1} の共役複素数である.

このとき，$z_n = 1$ となる確率を求めよ.

$\boxed{5}$ (35 点)

曲線 $y = \log x$ 上の点 $\mathrm{A}(t, \log t)$ における法線上に，点 B を $\mathrm{AB} = 1$ となるようにとる．ただし B の x 座標は t より大きいとする.

(1) 点 B の座標 $(u(t), v(t))$ を求めよ．また $\left(\dfrac{du}{dt}, \dfrac{dv}{dt}\right)$ を求めよ.

(2) 実数 r は $0 < r < 1$ を満たすとし，t が r から 1 まで動くときに点 A と点 B が描く曲線の長さをそれぞれ $L_1(r)$, $L_2(r)$ とする．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{r \to +0}(L_1(r) - L_2(r))$ を求めよ.

$\boxed{6}$ (35 点)

四面体 ABCD は $\mathrm{AC} = \mathrm{BD}$, $\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$ を満たすとし，辺 AB の中点を P, 辺 CD の中点を Q とする.

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ.

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける．このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ.

問題は，このページで終わりである.