

# 数 学 II

(全 問 必 答)

## 第 1 問 (配点 30)

{ 1 }

(1) 1 ラジアンとは,  のことである。 に当てはまるものを, 次の①~③のうちから一つ選べ。

- ① 半径が 1, 面積が 1 の扇形の中心角の大きさ
- ② 半径が  $\pi$ , 面積が 1 の扇形の中心角の大きさ
- ③ 半径が 1, 弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ
- ④ 半径が  $\pi$ , 弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ

(2)  $144^\circ$  を弧度で表すと  $\frac{\text{イ}}{\text{ウ}}\pi$  ラジアンである。また,  $\frac{23}{12}\pi$  ラジアン

を度で表すと   $^\circ$  である。

(数学 II 第 1 問は次ページに続く。)

(3)  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$  の範囲で

$$2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{30}\right) = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす  $\theta$  の値を求めよう。

$x = \theta + \frac{\pi}{5}$  とおくと、 $\textcircled{1}$  は

$$2 \sin x - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}\right) = 1$$

と表せる。加法定理を用いると、この式は

$$\sin x - \sqrt{\boxed{\text{ク}}} \cos x = 1$$

となる。さらに、三角関数の合成を用いると

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right) = \frac{1}{\boxed{\text{コ}}}$$

と変形できる。 $x = \theta + \frac{\pi}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$  だから、 $\theta = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}\pi$  である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ

〔2〕  $c$  を正の定数として、不等式

$$x^{\log_3 x} \geq \left(\frac{x}{c}\right)^3 \dots\dots\dots ②$$

を考える。

3 を底とする ② の両辺の対数を取り、 $t = \log_3 x$  とおくと

$$t \boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タ}} t + \boxed{\text{タ}} \log_3 c \geq 0 \dots\dots\dots ③$$

となる。ただし、対数  $\log_a b$  に対し、 $a$  を底といい、 $b$  を真数という。

$c = \sqrt[3]{9}$  のとき、② を満たす  $x$  の値の範囲を求めよう。③ により

$$t \leq \boxed{\text{チ}}, \quad t \geq \boxed{\text{ツ}}$$

である。さらに、真数の条件を考えて

$$\boxed{\text{テ}} < x \leq \boxed{\text{ト}}, \quad x \geq \boxed{\text{ナ}}$$

となる。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ

次に、②が $x > \boxed{\text{テ}}$ の範囲でつねに成り立つような $c$ の値の範囲を求めよう。

$x$ が $x > \boxed{\text{テ}}$ の範囲を動くとき、 $t$ のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ニ}}$ である。 $\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

① 正の実数全体

② 負の実数全体

③ 実数全体

④ 1以外の実数全体

この範囲の $t$ に対して、④が成り立つための必要十分条件は、

$\log_3 c \geq \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。すなわち、 $c \geq \sqrt{\boxed{\text{ハヒ}}}$ である。

## 数学Ⅱ

### 第2問 (配点 30)

〔1〕  $p > 0$  とする。座標平面上の放物線  $y = px^2 + qx + r$  を  $C$  とし、直線  $y = 2x - 1$  を  $l$  とする。 $C$  は点  $A(1, 1)$  において  $l$  と接しているとする。

(1)  $q$  と  $r$  を、 $p$  を用いて表そう。放物線  $C$  上の点  $A$  における接線  $l$  の傾きは  $\boxed{\text{ア}}$  であることから、 $q = \boxed{\text{イウ}}p + \boxed{\text{エ}}$  がわかる。さらに、 $C$  は点  $A$  を通ることから、 $r = p - \boxed{\text{オ}}$  となる。

(2)  $v > 1$  とする。放物線  $C$  と直線  $l$  および直線  $x = v$  で囲まれた図形の面積  $S$  は  $S = \frac{p}{\boxed{\text{カ}}}(v^3 - \boxed{\text{キ}}v^2 + \boxed{\text{ク}}v - \boxed{\text{ケ}})$  である。

また、 $x$  軸と  $l$  および 2 直線  $x = 1$ ,  $x = v$  で囲まれた図形の面積  $T$  は、 $T = v \boxed{\text{コ}} - v$  である。

$U = S - T$  は  $v = 2$  で極値をとるとする。このとき、 $p = \boxed{\text{サ}}$  であり、 $v > 1$  の範囲で  $U = 0$  となる  $v$  の値を  $v_0$  とすると、

$v_0 = \frac{\boxed{\text{シ}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$  である。 $1 < v < v_0$  の範囲で  $U$  は  $\boxed{\text{ソ}}$ 。

$\boxed{\text{ソ}}$  に当てはまるものを、次の①～④のうちから一つ選べ。

- ① つねに増加する    ② つねに減少する    ③ 正の値のみをとる  
 ④ 負の値のみをとる    ⑤ 正と負のどちらの値もとる

$p = \boxed{\text{サ}}$  のとき、 $v > 1$  における  $U$  の最小値は  $\boxed{\text{タチ}}$  である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ

〔2〕 関数 $f(x)$ は $x \geq 1$ の範囲でつねに $f(x) \leq 0$ を満たすとする。 $t > 1$ のとき、曲線 $y = f(x)$ と $x$ 軸および2直線 $x = 1$ 、 $x = t$ で囲まれた図形の面積を $W$ とする。 $t$ が $t > 1$ の範囲を動くとき、 $W$ は、底辺の長さが $2t^2 - 2$ 、他の2辺の長さがそれぞれ $t^2 + 1$ の二等辺三角形の面積とつねに等しいとする。このとき、 $x > 1$ における $f(x)$ を求めよう。

$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分とする。一般に、 $F'(x) = \boxed{\text{ツ}}$ 、 $W = \boxed{\text{テ}}$ が成り立つ。 $\boxed{\text{ツ}}$ 、 $\boxed{\text{テ}}$ に当てはまるものを、次の①～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでもよい。

- |                 |                  |                  |
|-----------------|------------------|------------------|
| ① $-F(t)$       | ④ $F(t)$         | ⑦ $F(t) - F(1)$  |
| ② $F(t) + F(1)$ | ⑤ $-F(t) + F(1)$ | ⑧ $-F(t) - F(1)$ |
| ③ $-f(x)$       | ⑥ $f(x)$         | ⑨ $f(x) - f(1)$  |

したがって、 $t > 1$ において

$$f(t) = \boxed{\text{トナ}} t^{\boxed{\text{ニ}}} + \boxed{\text{ヌ}}$$

である。よって、 $x > 1$ における $f(x)$ がわかる。

## 数学Ⅱ

### 第3問 (配点 20)

座標平面上の2点  $A(-1, 0)$ ,  $B(2, 1)$  を通る直線を  $l_1$  とする。また、方程式  $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 36 = 0$  が表す円を  $C_1$  とする。

(1)  $l_1$  の方程式は  $x - \boxed{\text{ア}}y + \boxed{\text{イ}} = 0$  である。また、 $C_1$  の中心は  $(\boxed{\text{ウエ}}, \boxed{\text{オ}})$  で、半径は  $\boxed{\text{カ}}$  である。

(2)  $C_1$  上の点  $P(a, b)$  に対して、三角形  $ABP$  の重心  $G$  の座標を  $(s, t)$  とおくと、 $a = \boxed{\text{キ}}s - \boxed{\text{ク}}$ ,  $b = \boxed{\text{ケ}}t - \boxed{\text{コ}}$  である。したがって、 $P$  が  $C_1$  上を動くとき、 $G$  の軌跡は中心  $\left(\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}, \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)$ , 半径  $\boxed{\text{タ}}$  の円となる。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

- (3) (2)で求めた円を  $C_2$  とする。点  $Q$  が  $C_2$  上を動き、点  $R$  が線分  $AB$  上を動くとき、線分  $QR$  の長さの最小値と最大値を求めよう。

$C_2$  の中心を通り、直線  $l_1$  と垂直な直線  $l_2$  の方程式は

$$\boxed{\text{チ}}x + \boxed{\text{ツ}}y - 1 = 0$$

である。 $l_1$  と  $l_2$  の交点は、線分  $AB$  を  $1 : \boxed{\text{テ}}$  に内分することがわかる。よって、 $l_2$  は線分  $AB$  と交わるので、 $QR$  の長さの最小値は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}} - \boxed{\text{タ}}$$

である。

$QR$  の長さが最大となるときの  $R$  の座標は  $(\boxed{\text{ネ}}, \boxed{\text{ノ}})$  である。し

たがって、最大値は

$$\frac{\boxed{\text{ハ}}\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}} + \boxed{\text{タ}}$$

である。

## 数学Ⅱ

### 第4問 (配点 20)

$a, b, c$  を実数とし,  $x$  の整式  $P(x)$  を

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とする。3次方程式  $P(x) = 0$  は虚数  $-1 + \sqrt{6}i$  を解にもつとする。

- (1) 3次方程式  $P(x) = 0$  の実数解を  $a$  を用いて表そう。

$P(x)$  の  $x$  に虚数  $-1 + \sqrt{6}i$  を代入し, 整理すると

$$P(-1 + \sqrt{6}i) = \boxed{\text{アイ}} a - b + c + \boxed{\text{ウエ}} \\ + \left( \boxed{\text{オカ}} a + b - \boxed{\text{キ}} \right) \sqrt{6}i$$

となる。したがって,  $b, c$  を  $a$  を用いて表すと

$$b = \boxed{\text{ク}} a + \boxed{\text{ケ}}, \quad c = \boxed{\text{コ}} a - \boxed{\text{サシ}}$$

となる。

二つの虚数  $-1 + \sqrt{6}i, -1 - \sqrt{6}i$  を解とする2次方程式で,  $x^2$  の係数が1のものは

$$x^2 + \boxed{\text{ス}} x + \boxed{\text{セ}} = 0$$

である。 $P(x)$  をこの方程式の左辺の整式で割ると, 商は  $x + a - \boxed{\text{ソ}}$ ,

余りは  $\boxed{\text{タ}}$  である。よって, 方程式  $P(x) = 0$  の実数解は

$$x = \boxed{\text{チ}} a + \boxed{\text{ツ}}$$

と表せる。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ

(2)  $P(x)$ を $x + a - 3$ で割ったときの余りが6のとき、 $a = \boxed{\text{テ}}$ である。

このとき、 $P(x)$ を2次の整式 $Q(x)$ で割ったときの商は $x - 1$ 、余りは $13x + 17$ とすると

$$Q(x) = x^2 + \boxed{\text{ト}}x + \boxed{\text{ナ}}$$

である。